Kollaps, Strahlteiler und die Frage nach der Wirklichkeit

Mathematik und Physik der quantenmechanischen Messung — Fachpapier FP-01

Thomas Schüller
Syntagma Forschung Wien · ORCID 0009-0003-9799-6747 · forschung@tschueller.com

Fassung 1.0 · Stand 26.10.2026 · Kennung QUANT-PROV0001 (vorläufig)

Zusammenfassung

Das Papier arbeitet das Messproblem der Quantenmechanik am kleinsten vollständigen Beispiel auf: dem Strahlteiler und dem daraus gebauten Mach-Zehnder-Interferometer. Es trennt drei Ebenen, die in der öffentlichen Diskussion oft vermischt werden: die mathematische Struktur (Hilbertraum, unitäre Operatoren, Konventionen), die Vorhersageregel (Born- und Lüders-Regel, umgangssprachlich „Kollaps“) und die physikalische Aussage (Klickhäufigkeiten, Sichtbarkeit, Koinzidenzen). An sechs Versuchsanordnungen — ideales Interferometer, Welcher-Weg-Marker, Elitzur-Vaidman-Bombentest, Quantenradierer, unsymmetrischer Strahlteiler und Hong-Ou-Mandel-Effekt — wird gezeigt, was der Formalismus festlegt und was offenbleibt. Anschließend werden die gängigen Deutungen danach geordnet, welche Annahme des Messproblems sie aufgeben, und die Kollapsmodelle nach Ghirardi-Rimini-Weber sowie Diósi-Penrose mit ihren prüfbaren Vorhersagen dargestellt. Der letzte Teil behandelt das Verhältnis von Mathematik und Physik: was an der Theorie Konvention ist, was mathematische Sätze (Gleason, Kochen-Specker, Bell, Pusey-Barrett-Rudolph) tatsächlich ausschließen und wo die Frage nach der Wirklichkeit empirisch offen ist. Ein Behauptungsregister stuft 21 Aussagen nach ihrer Beleglage ein. Alle Zahlen stammen aus einem offengelegten Rechenkern; das begleitende Browserwerkzeug rechnet dieselben Anordnungen interaktiv nach.

1 Anlass und Fragestellung

Anlass ist eine Debatte des Institute of Art and Ideas mit Roger Penrose, Slavoj Žižek und Sabine Hossenfelder unter dem Titel „Quantum and the Unknowable Universe“ (Institute of Art and Ideas o. J.). In der Bewerbung werden drei Aussagen zugespitzt: Einstein habe die Quantentheorie für „albern“ gehalten, Heisenberg habe die Wirklichkeit als bloße Möglichkeit verstanden, und die eigentliche Aufgabe sei die Vereinigung von Quantenmechanik und allgemeiner Relativitätstheorie.

Diese Aussagen berühren drei verschiedene Fragen, die im Folgenden getrennt behandelt werden:

1. **Was legt die Mathematik fest?** Welche Struktur hat die Theorie, und welche ihrer Bestandteile sind Konvention?
2. **Was misst das Experiment?** Welche Größen sind beobachtbar, und wie gut sind die Vorhersagen bestätigt?
3. **Was ist Deutung?** Welche Aussagen über „die Wirklichkeit“ gehen über Formalismus und Messung hinaus, und sind sie prüfbar?

Als durchgehendes Beispiel dient der Strahlteiler. Er ist das einfachste Bauteil, an dem Überlagerung, Interferenz, Messung und Welcher-Weg-Information vollständig und ohne Näherungen berechnet werden können. Alle Rechnungen beschränken sich auf einen

zweidimensionalen Zustandsraum; die Aussagen zum Messproblem gelten dennoch allgemein.

2 Der Formalismus in Kürze

2.1 Zustände, Dynamik und Wahrscheinlichkeiten

Ein reiner Zustand ist ein normierter Vektor $|\psi\rangle$ in einem komplexen Hilbertraum $\mathcal{H}$ (Neumann 1932; Dirac 1930). Für ein Photon, das sich in einem von zwei Wegen befinden kann, ist $\mathcal{H} = \mathbb{C}^2$ mit der Basis $|0\rangle$ (oberer Arm) und $|1\rangle$ (unterer Arm). Ein allgemeiner Zustand lautet

$$|\psi\rangle = a_0|0\rangle + a_1|1\rangle, \qquad |a_0|^2 + |a_1|^2 = 1.$$

Die Theorie enthält zwei Regeln für die zeitliche Änderung dieses Vektors, die von Neumann als Prozess 2 und Prozess 1 unterschied (Neumann 1932):

- **Unitäre Entwicklung.** Zwischen Messungen gilt $|\psi\rangle \mapsto U|\psi\rangle$ mit $U^\dagger U = \mathbb{1}$, erzeugt durch die Schrödinger-Gleichung. Die Entwicklung ist linear, deterministisch und umkehrbar.
- **Messung.** Wird eine Größe mit den Eigenzuständen $|k\rangle$ gemessen, tritt das Ergebnis k mit der Wahrscheinlichkeit
$$p(k) = |\langle k|\psi\rangle|^2$$
ein (Born-Regel, (Born 1926)). Danach wird der Zustand durch $|k\rangle$ ersetzt, allgemeiner durch $\Pi_k|\psi\rangle / \|\Pi_k|\psi\rangle\|$ mit dem Projektor Π_k (Lüders-Regel, (Lüders 1951)). Diese Ersetzung heißt umgangssprachlich **Kollaps** oder **Reduktion der Wellenfunktion**.

Die zweite Regel ist nichtlinear, stochastisch und nicht umkehrbar. Der Formalismus gibt nicht an, welche physikalischen Vorgänge als „Messung“ gelten. Genau hier setzt das Messproblem an (Abschnitt 6).

2.2 Dichtematrix

Für Gemische und Teilsysteme wird der Zustand durch die Dichtematrix ρ beschrieben; für einen reinen Zustand ist $\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$. Die Diagonalelemente ρ_{00}, ρ_{11} sind die Aufenthaltswahrscheinlichkeiten in den Armen. Die Nebendiagonalelemente $\rho_{01} = \rho_{10}^*$ heißen **Kohärenzen**; nur sie erzeugen Interferenz. Die Unterscheidung zwischen einer Überlagerung (Kohärenzen ungleich null) und einem Gemisch (Kohärenzen null) ist für alles Weitere zentral.

3 Der Strahlteiler als Minimalmodell

3.1 Die Strahlteilermatrix

Ein verlustfreier Strahlteiler verbindet zwei Eingangs- mit zwei Ausgangsmoden. Er wird durch eine unitäre 2×2-Matrix beschrieben. Dieses Papier verwendet die symmetrische Konvention mit Reflexionsgrad R:

$$B(R) = \begin{pmatrix} t & ir \\ ir & t \end{pmatrix}, \qquad t = \sqrt{1-R}, \quad r = \sqrt{R}.$$

Der Faktor i bei der Reflexion wird oft als physikalische Eigenschaft („jede Reflexion verschiebt die Phase um $\pi/2$“) dargestellt. Das trifft in dieser Form nicht zu. Die Unitarität legt nur eine Summe der vier Phasen fest; für einen allgemeinen verlustfreien Strahlteiler mit Transmissionsphasen ϕ_t, ϕ_t' und Reflexionsphasen ϕ_r, ϕ_r' gilt

$$\phi_r + \phi_r' - \phi_t - \phi_t' = \pm\pi$$

© 2026 Thomas Schüller · Alle Rechte vorbehalten

(Zeilinger 1981). Die symmetrische Wahl $\phi_r = \phi_r' = \pi/2$, $\phi_t = \phi_t' = 0$ ist eine von unendlich vielen zulässigen. Eine reale dielektrische Schicht hat bestimmte Phasen; beobachtbar sind in einem Interferometer aber nur Phasendifferenzen, in die diese Summe eingeht. Das ist ein erstes Beispiel für die Trennung zwischen mathematischer Konvention und physikalischer Aussage (Abschnitt 9).

3.2 Ein Photon am Strahlteiler

Trifft ein einzelnes Photon im Zustand $|0\rangle$ auf einen 50:50-Strahlteiler, entsteht

$$B(\tfrac{1}{2})|0\rangle = \tfrac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + i|1\rangle).$$

Stehen hinter beiden Ausgängen Detektoren, spricht in jedem Durchgang genau einer an, jeweils mit Wahrscheinlichkeit $\tfrac{1}{2}$. Die Anordnung wurde mit einer echten Einzelphotonenquelle geprüft: Gleichzeitige Klicks in beiden Detektoren traten deutlich seltener auf, als jede klassische Welle zulässt (Antikorrelationsparameter $\alpha < 1$) (Grangier, Roger, und Aspect 1986). Das Photon wird also nicht geteilt. Die Überlagerung zeigt sich erst, wenn beide Wege wieder zusammengeführt werden.

3.3 Das Mach-Zehnder-Interferometer

Abbildung 1 zeigt die Anordnung. Nach dem ersten Strahlteiler durchläuft der obere Arm einen Phasenschieber $P(\varphi) = \mathrm{diag}(e^{i\varphi}, 1)$; ein zweiter Strahlteiler führt die Wege zusammen. Der Ausgangszustand ist

$$|\psi_{\text{aus}}\rangle = B(R_2)\, P(\varphi)\, B(R_1)\, |0\rangle.$$

Für zwei 50:50-Strahlteiler ergibt die Rechnung (Anhang A.1)

$$|\psi_{\text{aus}}\rangle = \tfrac{1}{2}(e^{i\varphi} - 1)|0\rangle + \tfrac{i}{2}(e^{i\varphi} + 1)|1\rangle,$$

also

$$p(D_0) = \sin^2(\varphi/2), \qquad p(D_1) = \cos^2(\varphi/2).$$

Bei $\varphi = 0$ bleibt der Ausgang D_0 vollständig dunkel. Jedes einzelne Photon „verhält sich“ so, als hätte es beide Wege genommen: Würde es nur einen Weg nehmen, erhielte jeder Detektor die Hälfte.

3.4 Unsymmetrische Strahlteiler

Ist der erste Strahlteiler unsymmetrisch ($R_1 \neq \tfrac{1}{2}$), sind die Arme ungleich besetzt. Die Interferenz bleibt erhalten, ihre Sichtbarkeit

$$V = \frac{p_{\max} - p_{\min}}{p_{\max} + p_{\min}}$$

sinkt jedoch auf $V = 2\sqrt{R_1(1-R_1)}$ (bei 50:50-Ausgangsteiler). Für $R_1 = 0{,}8$ folgt $V = 0{,}8$. Das ist eine Vorhersagbarkeit des Weges aus der Präparation, keine Messung: Der Zustand bleibt rein, die Kohärenz ist vollständig.

4 Welcher-Weg-Information, Dekohärenz und Komplementarität

4.1 Der Marker

Nun wird im oberen Arm ein Marker eingesetzt, zum Beispiel ein Polarisationsdreher oder ein Atom, dessen Zustand sich beim Durchgang ändert. Formal wird das Photon mit einem zweiten System verschränkt:

$$\tfrac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle|E_0\rangle + i|1\rangle|E_1\rangle).$$

© 2026 Thomas Schüller · Alle Rechte vorbehalten

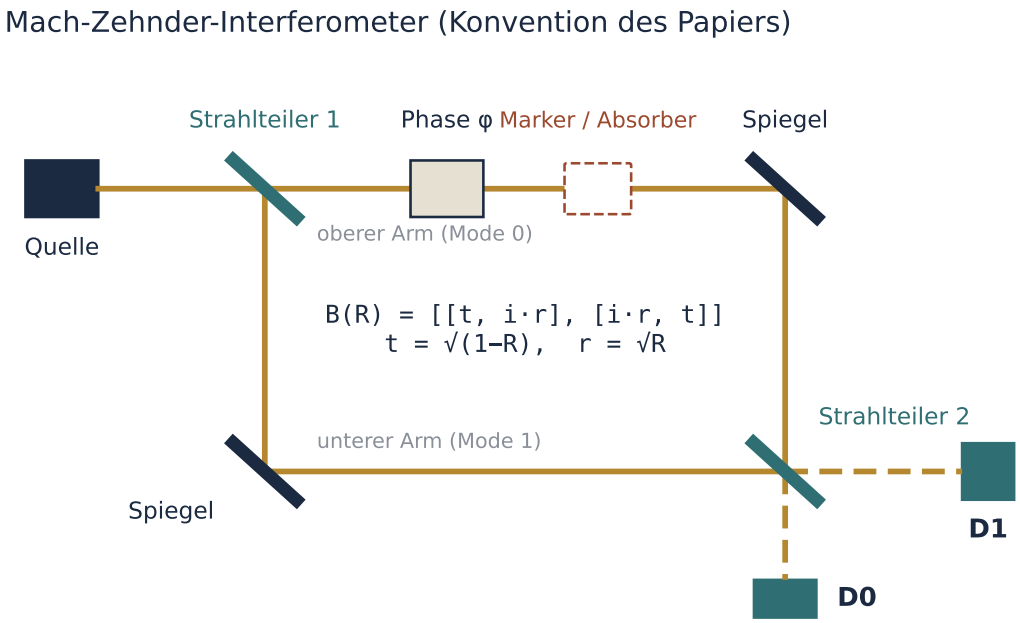


Abbildung 1: Mach-Zehnder-Interferometer in der Konvention dieses Papiers. Der Marker bzw. Absorber im oberen Arm wird in Abschnitt 4 und 5 verwendet. Ausgang D0 ist bei φ = 0 dunkel.

Betrachtet man nur das Photon, erhält man durch Spurbildung über den Marker die Dichtematrix

$$\rho = \tfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -i\gamma^{*} \\ i\gamma & 1 \end{pmatrix}, \qquad \gamma = \langle E_0 | E_1 \rangle .$$

Der Überlapp γ der Markerzustände multipliziert die Kohärenzen. Bei $\gamma = 1$ trägt der Marker keine Information; bei $\gamma = 0$ sind die Markerzustände orthogonal, der Weg ist im Prinzip vollständig ablesbar, und die Interferenz verschwindet (Abb. 2). Entscheidend ist, dass niemand den Marker tatsächlich auslesen muss. Es genügt, dass die Information physikalisch vorhanden ist.

4.2 Die Englert-Ungleichung

Die Beziehung zwischen Weginformation und Interferenz lässt sich quantitativ fassen (Wootters und Zurek 1979; Englert 1996). Mit der Unterscheidbarkeit D (bestmögliche Wegbestimmung aus Präparation und Marker) und der Sichtbarkeit V gilt

$$D^2 + V^2 \leq 1,$$

mit Gleichheit für reine Markerzustände. Für einen 50:50-Eingangsteiler ist $V = |\gamma|$ und $D = \sqrt{1 - |\gamma|^2}$. Die Ungleichung wurde an einem Atominterferometer bestätigt (Dürr, Nonn, und Rempe 1998); entsprechende Anordnungen hatten unter anderem Scully, Englert und Walther vorgeschlagen (Scully, Englert, und Walther 1991). Abbildung 3 zeigt berechnete Punkte für symmetrische und unsymmetrische Anordnungen; sie liegen auf dem Rand, weil die Rechnung reine Zustände verwendet.

Damit ist Bohrs Komplementaritätsprinzip, das ursprünglich qualitativ formuliert war (Bohr 1928), für diesen Fall ein mathematischer Satz über Dichtematrizen. Eine „Unschärfe“ der Messapparatur ist für die Erklärung nicht nötig; der Verlust der Interferenz folgt allein aus der Verschränkung.

© 2026 Thomas Schüller · Alle Rechte vorbehalten