Näherung und Geltung

Thomas Schüller · Syntagma Forschung · ORCID 0009-0003-9799-6747 · Fassung 0.3 · 09.11.2026 · Alle Rechte vorbehalten

Näherung und Geltung

Warum physikalische Theorien nur innerhalb angebbarer Grenzen wahr sind

---

Kurzfassung

Die Physik verfügt über keine exakten Theorien. Sie verfügt über kontrollierte Näherungen mit angebbarem Geltungsbereich. Diese Arbeit entwickelt vier Bedingungen, unter denen eine Näherung als kontrolliert gelten kann — ein expliziter Kleinparameter, eine angebbare Fehlerordnung, eine benennbare Geltungsgrenze, ein bekanntes Bruchverhalten — und prüft sie an sieben Verfahrensklassen von der Störungsrechnung bis zur numerischen Diskretisierung. Der Befund: Formalismen führen ihren Geltungsbereich nicht mit sich. Er wird extern verwaltet — in Lehrbüchern, Normen, Sicherheitsbeiwerten, Codes of Practice. Damit wird die Geltungsgrenze zu einer Verfügungsgröße im Sinne der ρ/δ-Asymmetrie: Wer den Bereich festlegt, entscheidet, wen der Restfehler trifft. Ein datengetriebener Surrogatmodell-Apparat verschärft das, weil er den Geltungsbereich nicht mehr analytisch mitführt, sondern nur noch statistisch und nachträglich erwerben kann.

Schlüsselbegriffe: Näherung · Idealisierung · Kleinparameter · asymptotische Reihe · singulärer Limes · effektive Feldtheorie · Diskretisierungsfehler · Teilsicherheitsbeiwert · Risiko-Verfügungs-Asymmetrie

---

Teil I · Der Exaktheitsschein

1.1 Was der Lehrbuchsatz verschweigt

Ein physikalisches Gesetz erscheint in der Darstellung als Gleichung ohne Fußnote. `F = ma`. `E = mc²`. `pV = nRT`. Die Form ist geschlossen, die Zeichen sind eindeutig, es fehlt nichts. Was fehlt, ist die Angabe, wo der Satz aufhört zu gelten.

Diese Auslassung ist kein didaktisches Versehen. Sie ist strukturell: **Eine Gleichung kann ihren eigenen Geltungsbereich nicht enthalten.** `F = ma` enthält keine Klausel über Geschwindigkeiten nahe c. `pV = nRT` enthält keine Klausel über Realgaskorrekturen. Der Geltungsbereich ist eine Aussage *über* die Gleichung, nicht *in* ihr. Er muss separat mitgeführt und separat gelehrt werden — und genau das geschieht unvollständig.

Die Konsequenz zeigt sich nicht im Hörsaal, sondern in der Anwendung. Ein Modell, das außerhalb seines Bereichs gerechnet wird, meldet keinen Fehler. Es liefert eine Zahl. Die Zahl hat dieselben Dezimalstellen, dieselbe Einheit, dasselbe Erscheinungsbild wie eine gültige Zahl. Der Unterschied liegt nicht im Ergebnis, sondern in dem, was das Ergebnis mit der Welt zu tun hat — und diese Beziehung ist im Ergebnis nicht sichtbar.

1.2 Näherung, Idealisierung, Setzung

Die philosophische Literatur trennt zwei Vorgänge, die in der Praxis vermengt werden. Norton hat die Unterscheidung 2012 präzise gefasst: Eine **Näherung** ist eine unexakte Beschreibung des Zielsystems selbst. Eine **Idealisierung** ist ein *anderes* System, dessen Eigenschaften das Zielsystem unexakt beschreiben. Der Unterschied wirkt terminologisch, hat aber Folgen: Ein Grenzsystem, das durch einen Limesprozess entsteht, kann Eigenschaften haben, die kein reales System hat — und dann beschreibt es nicht mehr, es dient nur noch als Rechenhilfe.

Das reibungsfreie Pendel ist eine Näherung: Es beschreibt dasselbe Pendel, nur unter Vernachlässigung eines Terms. Das unendlich ausgedehnte Spinsystem der Phasenübergangstheorie ist eine Idealisierung: Es ist ein anderes System, und zwar eines, das nicht existieren kann.

Dieser Arbeit fügt eine dritte Kategorie hinzu, die weder Näherung noch Idealisierung ist:

> **Setzung.** Eine unexakte Beschreibung ohne angebbaren Fehler. Sie kann zutreffen. Sie ist aber nicht prüfbar, weil kein Maß existiert, an dem sich ihr Abstand zum Zielsystem messen ließe.

Der Übergang von Näherung zu Setzung ist nicht durch Ungenauigkeit markiert, sondern durch **fehlende Kontrolle**. Eine Näherung mit zehn Prozent Fehler, deren Fehlerordnung bekannt ist, ist wissenschaftlich. Eine Näherung mit einem Promille Fehler, deren Fehlerordnung niemand kennt, ist es nicht.

1.3 Die These

> Die Trennlinie zwischen wissenschaftlicher und unwissenschaftlicher Modellbildung verläuft nicht bei *exakt gegen ungefähr*, sondern bei *kontrolliert gegen unkontrolliert*.

Was Kontrolle heißt, entwickelt Teil II.

Teil II · Die vier Bedingungen

Eine Näherung ist kontrolliert, wenn sie vier Angaben mitführt. Fehlt eine, liegt eine Setzung vor.

2.1 Bedingung 1 — Der explizite Kleinparameter

Es muss eine dimensionslose Größe ε geben, in der entwickelt wird, und sie muss **aus dem Problem selbst** gebildet sein. Nicht: „der Term ist klein". Sondern: der Term ist von der Größenordnung ε, und ε ist das Verhältnis zweier im Problem auftretender Skalen.

Beispiele: `v/c` (Geschwindigkeit zu Lichtgeschwindigkeit), `mₑ/M_K` (Elektronen- zu Kernmasse), `Kn = λ/L` (mittlere freie Weglänge zu charakteristischer Länge), `Ma = u/c_s` (Strömungs- zu Schallgeschwindigkeit), `α ≈ 1/137` (Feinstrukturkonstante), `h/L` (Gitterweite zu Feldlänge).

Die Bedingung ist schärfer, als sie aussieht. Ein nachträglich eingeführter Anpassungsparameter erfüllt sie nicht: Er ist kein Verhältnis zweier physikalischer Skalen, sondern ein Freiheitsgrad der Kurvenanpassung. Der Unterschied ist prüfbar: Ein echter Kleinparameter lässt sich unabhängig von den Messdaten aus der Problemgeometrie berechnen.

2.2 Bedingung 2 — Die angebbare Fehlerordnung

Der vernachlässigte Rest muss der Größenordnung nach benennbar sein: `O(εⁿ)`. Nicht „klein", sondern „von zweiter Ordnung in v/c".

Diese Bedingung leistet zwei Dinge. Sie erlaubt erstens eine Fehlerabschätzung ohne Kenntnis der exakten Lösung. Sie erlaubt zweitens die Entscheidung, ob die nächste Ordnung mitzurechnen ist: Wenn der Sprung von `O(ε)` auf `O(ε²)` das Ergebnis nicht bewegt, ist die Reihe an der relevanten Stelle konvergiert. Wenn er es bewegt, war die erste Ordnung nicht genug.

Der stille Nebensatz lautet: Die Koeffizienten der Reihe müssen von der Ordnung eins sein. Wachsen sie faktoriell, gilt die Abschätzung nicht mehr — dann greift Teil IV.

2.3 Bedingung 3 — Die benennbare Geltungsgrenze

Es muss ein Wert oder Bereich existieren, ab dem die Näherung ungültig wird, und dieser Wert muss **vor** der Rechnung angebbar sein, nicht danach.

Rivat hat die Konsequenz des Fehlens scharf gefasst: Wo die empirischen Grenzen nicht vorab abschätzbar sind, schrumpft der Geltungsbereich auf den Bereich, in dem bereits geprüft wurde. Eine fehlende Grenzangabe heißt also nicht „unbegrenzt gültig“, sondern „gültig nur dort, wo gemessen wurde“ — eine erheblich engere Aussage, als die Praxis ihr gewöhnlich unterstellt.

Diese Bedingung ist die am häufigsten verletzte. In der Praxis wird die Geltungsgrenze rückwärts erschlossen: Man rechnet, vergleicht mit Messungen, und wo die Abweichung wächst, zieht man die Grenze. Das ist Kalibrierung, nicht Geltungsbestimmung. Der Unterschied wird sichtbar, sobald man in ein Regime ohne Messdaten extrapoliert — und genau dafür werden Modelle gebaut.

2.4 Bedingung 4 — Das bekannte Bruchverhalten

Es muss bekannt sein, **wie** die Näherung an ihrer Grenze versagt. Zwei Fälle:

Regulärer Bruch. Die Näherung wird graduell schlechter. Der Fehler wächst stetig mit ε. Die Fehlerordnung bleibt bis nahe an die Grenze aussagekräftig. Eine Verfeinerung im selben Ansatz verbessert das Ergebnis.

Singulärer Bruch. Die Näherung versagt strukturell. Die Lösungsmenge selbst ändert sich beim Grenzübergang. Keine Verfeinerung im selben Ansatz repariert das; es braucht einen anderen Ansatz. Teil V behandelt diesen Fall ausführlich, weil er die praktisch folgenreichere Klasse ist.

2.5 Warum vier und nicht drei

Die vierte Bedingung wird oft weggelassen, weil sie über die Fehlerrechnung hinausgeht. Sie ist aber der Fehlerrechnung logisch **vorgeordnet**: Bei singulärem Bruch ist die Fehlerabschätzung selbst nicht mehr gültig. Ein Modell im singulären Regime meldet dann keinen großen Fehler — es meldet einen kleinen Fehler und liefert ein falsches Ergebnis. Die Fehlerabschätzung wird zur Fehlerquelle.

Die vier Bedingungen kon

Prüfschema. Fehlt eine Bedingung, liegt keine Näheru

BEDINGUNG 1

Kleinparameter

$\varepsilon \ll 1$

Explizit benannt, dimensionslos, aus dem Problem selbst gebildet — nicht nachträglich angepasst.

BEDINGUNG

Fehlerord

$O(\varepsilon^{n})$

Der vernachlä
Größenordnun
nicht nur „klei

alle vier erfüllt

Kontrollierte Näherung

Wissenschaftlich verwendbar. Fehler quantifizi

Kleinparameter im Anwendungsfall

NÄHERUNG	ε
Newton aus SRT	v / c
Born-Oppenheimer	m_e / M
QED-Störungsreihe	$\alpha \approx 1$

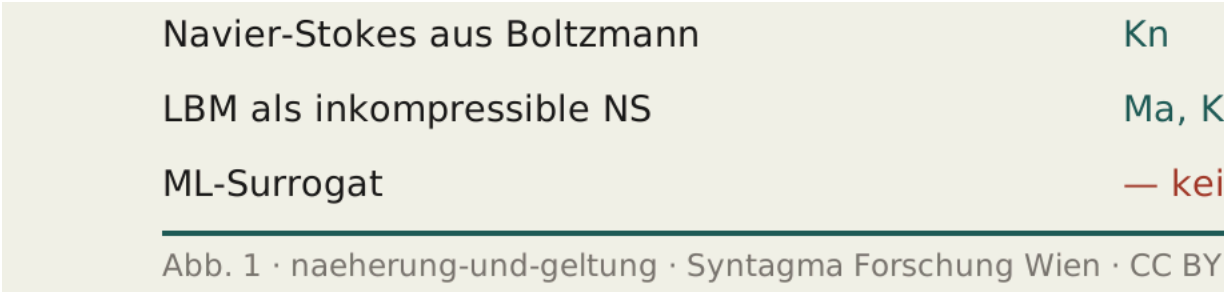


Abb. 1 — Die vier Bedingungen kontrollierter Näherung: Prüfschema mit Anwendungsfällen.

Abb. 1 · Die vier Bedingungen kontrollierter Näherung.

Teil II-B · NGK-8 — das Prüfinstrument

Die vier Bedingungen aus Teil II sagen, wann eine Näherung kontrolliert ist. Sie sagen nicht, wie man das an einem konkreten Fall feststellt. Dieser Teil schließt die Lücke mit einem achtkriteriellen Instrument.

2B.1 Was NGK-8 misst — und was nicht

NGK-8 beantwortet eine einzige Frage: **Ist diese Näherung kontrolliert?**

Nicht: ist sie richtig, genau oder üblich. Kontrolliertheit ist eine Eigenschaft der *Dokumentation und Prüfbarkeit* einer Näherung, nicht ihrer Genauigkeit. Eine grobe, aber vollständig charakterisierte Näherung ist kontrolliert. Eine sehr genaue Näherung ohne angebbare Bruchbedingung ist es nicht.

Das Instrument ist als Selbstprüfung angelegt, nicht als Fremdbewertung. Es ersetzt keine Verifikations- oder Validierungsprozedur nach ASME V&V 20, sondern geht ihr voraus: Es prüft, ob überhaupt genug Information vorliegt, um V&V sinnvoll anzusetzen.

2B.2 Die acht Kriterien

Die ersten vier entsprechen den Bedingungen aus Teil II. Die vier folgenden erfassen, was die Praxis zusätzlich verlangt: Reihenverhalten, Fehlerüberlagerung, externe Referenz und Weitergabe.

K1 — Kleinparameter benannt. Gibt es einen expliziten dimensionslosen Parameter ε, in dem entwickelt wird? *2* — ε ist benannt, dimensionslos und aus Systemgrößen berechenbar (Ma, Kn, v/c, m_e/M_K, Gi, h/L). *1* — Ein Kleinheitsargument existiert, ist aber nicht als Zahl ausgeführt. *0* — Die Vereinfachung wird ohne Parameter begründet („üblicherweise vernachlässigbar").

K2 — Fehlerordnung gebunden. Ist der Restfehler als $O(\varepsilon^n)$ mit angebbarem n gebunden? *2* — n ist bekannt und die Konstante abschätzbar oder empirisch kalibriert. *1* — n ist bekannt, die Konstante nicht. *0* — Keine Ordnung angebbar. Bei Diskretisierungsverfahren tritt K2 als beobachtete Konvergenzordnung auf und ist durch Netz- oder Zeitschrittverfeinerung messbar. Eine behauptete, aber nie gemessene Ordnung zählt als 1.

K3 — Geltungsgrenze angegeben. Existiert ein Schwellwert ε*, oberhalb dessen die Näherung nicht verwendet wird? *2* — ε* ist als Zahl angegeben und begründet. *1* — Eine qualitative Grenze existiert („nur für kleine Machzahlen"). *0* — Keine Grenze. Rivat hat die Konsequenz von K3 = 0 präzise gefasst: Wenn die empirischen Grenzen nicht vorab abschätzbar sind, reduziert sich der Geltungsbereich auf denjenigen, in dem die Näherung bereits geprüft wurde. K3 = 0 bedeutet daher nicht „unbegrenzt gültig", sondern „gültig nur dort, wo bereits gemessen wurde".

K4 — Bruchverhalten bekannt. Ist bekannt, ob der Zusammenbruch regulär oder singulär erfolgt? *2* — Der Typ ist bestimmt; bei singulärem Bruch ist der Ort benannt (Grenzschicht, Umkehrpunkt, konische Durchschneidung, kritischer Punkt). *1* — Typ vermutet, nicht belegt. *0* — Unbekannt.

K5 — Abbruchverhalten geprüft. Bei Reihenentwicklungen: Ist bekannt, ob die Reihe konvergiert oder asymptotisch divergiert, und wo die optimale Abbruchstelle liegt? *2* — Reihentyp bestimmt; bei asymptotischer Reihe ist N_opt bekannt oder aus dem Gliederverlauf ablesbar. *1* — Reihentyp bekannt, Abbruchstelle nicht bestimmt. *0* — Es wird stillschweigend Konvergenz unterstellt. Boyd hat das zugrundeliegende Verhalten ausgearbeitet: Die optimale Abbruchstelle liegt beim kleinsten Glied der Reihe, die Abbruchordnung skaliert wie $N_{opt} \propto 1/\varepsilon$, und der dort erreichbare superasymptotische Fehler verhält sich wie $O(\exp(-q/\varepsilon))$. K5 = 0 ist der Fall, in dem „mehr Rechenaufwand gleich mehr Genauigkeit" unterstellt wird, ohne dass das gilt.

K6 — Überlagerung getrennt bilanziert. Wirken mehrere Näherungen gleichzeitig, und sind ihre Fehler getrennt bilanziert? *2* — Modellfehler, Diskretisierungsfehler und Parameterunsicherheit sind getrennt ausgewiesen. *1* — Getrennt gedacht, nicht getrennt ausgewiesen. *0* — Ein einziger Genauigkeitsbegriff für alles. Am Gitter-Boltzmann-Verfahren treten Kompressibilitätsfehler $O(Ma^2)$, Modellfehler der Momentenschließung und Gitterfehler aus Zellgröße und Zeitschritt gemeinsam auf und sind unterschiedlich zu senken. Wer sie zusammenwirft, kann nicht entscheiden, welche Verfeinerung hilft.

K7 — Prüfpunkt außerhalb vorhanden. Existiert mindestens eine Referenz jenseits der Näherung — Messung, exakte Lösung, feinere Theorie —, gegen die geprüft wurde? *2* — Ja, und die Prüfung deckt den Randbereich ab. *1* — Ja, aber nur im komfortablen Mittelbereich. *0* — Keine externe Referenz. K7 = 1 ist der häufigste und der gefährlichste Fall: Validierung im gutmütigen Bereich erzeugt Vertrauen, das im Randbereich nicht gedeckt ist.

K8 — Grenze mitgeführt bis zum Anwender. Wird die Geltungsgrenze mit dem Ergebnis weitergegeben, oder bleibt sie beim Rechnenden? *2* — Ergebnis und Grenze sind ein Objekt; die Ausgabe enthält die Bedingung. *1* — Grenze dokumentiert, aber in einem separaten Dokument. *0* — Die Zahl wandert allein weiter.

K8 ist das ρ/δ-Kriterium. Es misst nicht die Näherung, sondern die Verfügungsverteilung: wer den Geltungsbereich kennt, und wer die Folgen seines Bruchs trägt. Alle sieben vorangehenden Kriterien können erfüllt sein, während K8 auf 0 steht — dann ist die Näherung technisch kontrolliert und praktisch unkontrolliert. Das ist der Regelfall in Werkzeugketten mit Arbeitsteilung und der Grund, warum Teil VIII ein eigener Teil ist.

2B.3 Skala und Sperrbedingung

Je Kriterium: **0** nicht erfüllt · **1** teilweise · **2** erfüllt. Summe 0 bis 16.

Summe	Einstufung	Bedeutung
14–16	**kontrolliert**	Fehler gebunden, Grenze benannt, Bruch bekannt
9–13	**teilkontrolliert**	Verwendbar unter Auflage; fehlende Kriterien dokumentieren
0–8	**unkontrolliert**	Ergebnis ist eine Vermutung; nicht als Nachweis verwendbar

Sperrbedingung, überschreibt die Summe: Ist K1 *oder* K2 mit 0 bewertet, lautet die Einstufung *unkontrolliert*, unabhängig vom Punktstand. Ohne Kleinparameter oder ohne Fehlerordnung existiert kein Objekt, das bewertet werden könnte. Das ist die Setzung aus Teil I.2 in operationaler Form.

2B.4 Zwei durchgerechnete Fälle

Fall 1 — Gitter-Boltzmann (BGK) für eine Innenraumströmung, Ma = 0,05, τ = 0,52

Kriterium	Punkte	Begründung
K1 Kleinparameter	2	Ma und Kn benannt, aus c_s, u, λ, L berechenbar
K2 Fehlerordnung	2	Kompressibilitätsfehler $O(Ma^2) \approx 2{,}5 \cdot 10^{-3}$
K3 Geltungsgrenze	2	Ma < 0,1 als Zahl; τ → 0,5 als Stabilitätsgrenze
K4 Bruchverhalten	1	Ma-Bruch regulär; τ-Bruch numerisch, Typ nicht sauber klassifiziert
K5 Abbruchverhalten	1	Chapman-Enskog-Reihe als asymptotisch bekannt; N_opt nicht bestimmt
K6 Überlagerung	2	Kompressibilitäts-, Schließungs- und Gitterfehler getrennt geführt
K7 Prüfpunkt außen	1	Validiert gegen Referenzfälle im Mittelbereich, nicht am Rand
K8 Grenze mitgeführt	1	In der Dokumentation, nicht in der Ausgabe
Summe	**12**	**teilkontrolliert**

Auflage: K7 und K8 sind die günstigsten Hebel. Eine Randbereichsvalidierung und eine Ausgabezeile mit dem aktuellen Ma-Wert heben die Einstufung auf 15 bis 16.

Fall 2 — Gaußsche Copula für ein Kreditportfolio, Stand 2006

Kriterium	Punkte	Begründung
K1 Kleinparameter	0	Keiner; die Vereinfachung liegt in der Abhängigkeitsstruktur, nicht in einer Entwicklung
K2 Fehlerordnung	0	Keine Fehlerordnung angebbar
K3 Geltungsgrenze	1	Tail-Unabhängigkeit war in der Fachliteratur benannt
K4 Bruchverhalten	1	Kontagionsfall als Bruchbedingung bekannt, nicht quantifiziert
K5 Abbruchverhalten	—	nicht anwendbar, als 1 gewertet

Kriterium	Punkte	Begründung
K6 Überlagerung	0	Ein Korrelationsparameter für alles
K7 Prüfpunkt außen	0	Kalibrierung an Marktpreisen desselben Marktes — zirkulär
K8 Grenze mitgeführt	0	Ergebnis wanderte als Rating weiter
Summe	**3**	**unkontrolliert**, zusätzlich Sperrbedingung K1 = K2 = 0

Der Fall zeigt die Trennung, auf die es ankommt. Nach der Untersuchung von MacKenzie und Spears waren die Modellierer keine unkritischen Anwender: Sie kannten die Schwächen und verwendeten die Modelle weiter, weil diese in Kommunikations-, Risikokontroll- und Vergütungsprozesse eingebettet waren. NGK-8 misst nicht Naivität. Es misst, ob die Bedingungen der Verwendbarkeit mit dem Ergebnis mitwandern. **K8 = 0 bei bekannter Grenze ist der schärfste Befund, den das Instrument liefern kann** — und zugleich der Befund, den eine rein technische Fehlerrechnung nicht erzeugen kann.

2B.5 Falsifikationsbedingungen des Instruments

NGK-8 ist widerlegt, wenn eines gilt:

- **F1** — Es lassen sich Näherungen finden, die alle acht Kriterien erfüllen und dennoch systematisch unbemerkt versagen. Dann ist die Kriterienliste unvollständig.
- **F2** — Es lassen sich Näherungen finden, die unter 9 Punkten liegen und in der Praxis dennoch nachweislich zuverlässig sind. Dann ist die Schwelle zu hoch angesetzt, oder die Kriterien messen etwas anderes als beabsichtigt.
- **F3** — Die K8-These ist widerlegt, wenn in Fällen mit $\rho = \delta$, in denen der Konstrukteur selbst das Risiko trägt, K8 nicht systematisch höher liegt als in Fällen mit $\rho \neq \delta$.

F3 ist die interessanteste Kante und in der vorliegenden Quellenlage nicht entschieden. Sie ist an Fällen aus der Ein-Mensch-Werkstatt und dem Eigenbau prüfbar — Kontexte, in denen die Verfügung über die Modellgrenze und die Exposition gegenüber ihrem Bruch bei derselben Person liegen.

2B.6 Abgrenzung

NGK-8 ist **kein** Ersatz für ASME V&V 20 und verwandte VVUQ-Verfahren, in denen es um quantifizierte Validierungsunsicherheit geht; hier geht es um die Vorfrage der Charakterisierbarkeit. Es ersetzt auch keine Netzkonvergenzstudie — K2 verlangt sie, leistet sie nicht — und keine Unsicherheitsfortpflanzung nach GUM.

NGK-8 ist **kein** Gütesiegel. Eine Einstufung als „kontrolliert" sagt aus, dass die Bedingungen der Verwendbarkeit bekannt und mitgeführt sind, nicht, dass das Ergebnis stimmt.

Teil III · Typologie der Näherungsverfahren

Sieben Klassen, geordnet nach der Art des Kleinparameters.

3.1 Perturbativ

Entwicklung in Potenzen einer Kopplung oder eines Skalenverhältnisses. Taylor-Reihen, Feynman-Reihen, Rayleigh-Schrödinger-Störungstheorie.

Stärke: die Fehlerordnung ist unmittelbar ablesbar. Schwäche: die Reihe konvergiert oft nicht (Teil IV), und der Ansatz setzt voraus, dass die gestörte Lösung qualitativ der ungestörten gleicht — was bei singulärer Störung nicht gilt.

3.2 Variationell

Ansatzfunktion mit freien Parametern, Minimierung eines Funktionals. Ritz-Verfahren, Hartree-Fock, Dichtefunktionaltheorie.

Besonderheit: liefert keine Fehlerordnung, sondern eine **einseitige Schranke**. Der Variationswert der Grundzustandsenergie liegt garantiert oberhalb des wahren Werts. Das ist weniger Information als eine Fehlerordnung, aber es ist harte Information — sie gilt exakt, nicht asymptotisch. Bedingung 2 wird hier durch eine strukturell andere Garantie ersetzt.

3.3 Mittelfeld

Ersetzung der Fluktuation durch ihren Mittelwert. Weiss'sches Molekularfeld, Hartree-Näherung, Random-Phase-Approximation.

Kleinparameter: das Verhältnis von Fluktuationsstärke zum Mittelwert, oder äquivalent $1/z$ bei Koordinationszahl z. Bruch: an kritischen Punkten, wo Fluktuationen auf allen Längenskalen dominieren. Das Ginzburg-Kriterium benennt, wann das eintritt — ein Musterfall einer vorab angebbaren Geltungsgrenze.